

Experimente mit Silizium-Photomultipliern

Martin Lehner, Gymnasium Biel-Seeland, martin.lehner@gbsl.ch

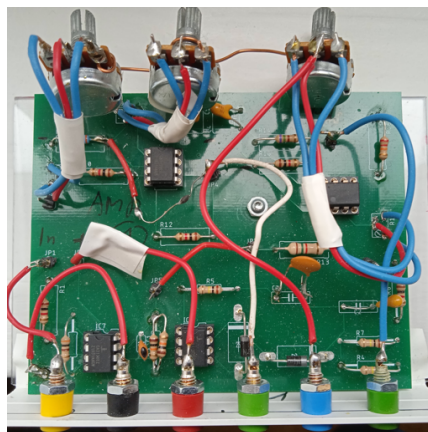
1 Einleitung

Silizium-Photomultiplier (SiPM) bestehen aus Gittern von winzigen Avalanche-Photodioden und erreichen eine ähnliche Empfindlichkeit wie konventionelle Photomultiplier. Eine ausführliche Einführung in ihre Funktionsweise findet man z.B. bei Gundacker und Heering [1]. Kurz gesagt, erzeugen auftreffende Photonen Elektron-Loch-Paare, die via Stossionisation zu einer 'lawinenartigen' Ladungsvervielfachung führen. Vorteile der SiPM sind die niedrige Versorgungsspannung (ca. 30V), ihre Kompaktheit und die relativ günstigen Anschaffungskosten. Sie lassen sich gut mit NaI-, CsI-, LaBr₃- oder Plastikszintillatoren kombinieren. Im medizinischen Bereich werden z.B. bei der PET Diagnose zunehmend SiPM eingesetzt. Im Gymnasium wären u.a. Gamma-spektroskopie oder Koinzidenzmessungen interessante Anwendungsgebiete.

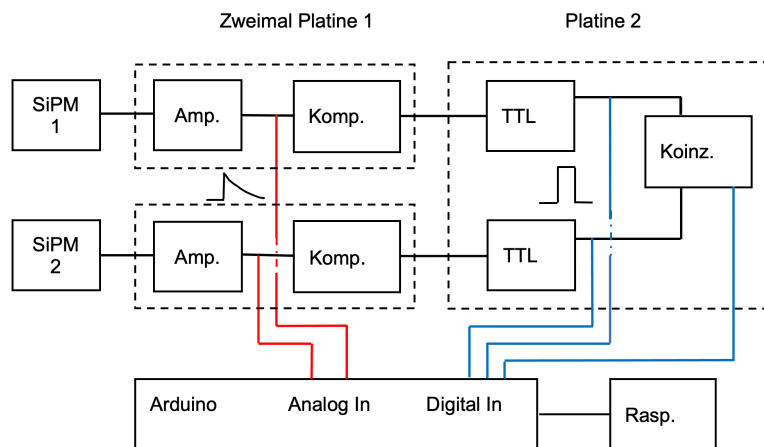


Abbildung 1: SiPM mit Lötstiften.

Seit etwa zwei Jahren habe ich mich nebenbei und ohne spezielle Vorkenntnisse mit SiPM und der zugehörigen Elektronik beschäftigt. Dieser Artikel berichtet von meinen Erfahrungen. Unter Link [2] sind alle Details zu den entwickelten Schaltungen und zum experimentellen Vorgehen zusammengefasst. Es wurden 6mm×6mm grosse SiPM (siehe Abbildung 1) mit etwa 19000 Zellen verwendet, die man für ca. SFr. 100.- erhält. Passende zylindrische NaI Szintillatoren kann man für etwa 90 SFr. pro Stück in China bestellen. **Die beiden selbst entwickelten Platinen können bei mir zum Selbstkostenpreis bezogen werden.**



(a)



(b)

Abbildung 2: (a) Spektrometer-Platine: Die wichtigsten Anschlüsse sind mit 2 mm Bananenbuchsen verbunden. Eine Plexiglas-Trägerplatte erlaubt es, die Schaltung in die integrierten Führungsschienen eines einfachen Standardgehäuses einzuschieben. (b) Blockschaltbild der Elektronik. Die (schnellen) Digitaleingänge des Arduino triggern die (langsamen) Analogmessungen.

2 Elektronik und Zubehör

Die ersten beiden Verstärkerstufen, der von mir entworfenen Spektrometer-Platine, sind vom Projekt 'Cosmic Watch' [3] übernommen, wo es um Experimente mit Myonen der kosmischen Strahlung geht. Nach diesen zwei OpAmp Stufen wird ein Kondensator geladen, dessen Spannungsmaximum möglichst proportional zur Energie

des ursprünglichen Peaks sein soll. Da diese Spannung mit einer (gross gewählten) Zeitkonstanten von etwa 300 μs abfällt, kann die Peakenergie mit einem (langsamen) Arduino erfasst werden. Allerdings sind so nur einige Hundert Pulse pro Sekunde verarbeitbar. Die ursprünglichen SiPM-Pulse sind etwa 1 μs lang. Die Schaltung weist auch einen Komparator auf, mit dem die Ansprechschwelle eingestellt wird. Der Verstärkungsgrad der zusätzlichen dritten Stufe kann mit zwei Potentiometern geregelt werden. Für die Einstellung der Elektronik ist ein Oszilloskop mit mindestens 20MHz Bandbreite sehr nützlich.

Die zweite Platine dient zur Koinzidenzmessung der Signale zweier SiPM. In jedem Kanal werden Rechteckpulse mit zwischen 5 und 25 μs einstellbarer Länge geformt und dann auf Gleichzeitigkeit getestet. Koinzidenzergebnisse werden ebenfalls vom oben erwähnten Arduino registriert und zusammen mit den beiden Pulsenergien auf einem Raspberry Pi abgespeichert. Die gesamte Elektronik ist also sehr einfach und billig gehalten. Abbildung 2 zeigt als Beispiel die Spektrometer-Platine und ein Blockschaltbild der gesamten Elektronik.

3 Experimente (Spektren, Koinzidenz, Quantenverschränkung)

3.1 Gamma-Spektroskopie

Die meisten Gymnasien besitzen wohl einige Gammaquellen, Spektrometer sind an Schulen aber wahrscheinlich weniger verbreitet. Abbildung 3 zeigt einige mit dem hier vorgestellten Eigenbau aufgenommene Spektren. Die Anzahl 'Slots' (1024) auf der horizontalen Achse ist durch den Arduino vorgegeben. Die verwendete Cobaltquelle war etwas schwach, der bekannte Doppelppeak ist aber immerhin gut auflösbar. Natürlich muss das Spektrometer vor Verwendung geeicht werden. Wegen des nicht ganz linearen Verhaltens der SiPM und der Elektronik ist eine Kalibrierung mit zwei Quellen empfehlenswert. Reizvoll für eine Schulstunde ist z.B. die Eichung mit einer Cäsiumquelle und anschliessend die Messung der Elektronmasse via Annihilations-Peak (511 keV) mit einer Positronenquelle (Na-22). Der Aufbau der ganzen Apparatur braucht natürlich Zeit und auch Geduld, Matura-Arbeiten könnten dazu ideal sein.

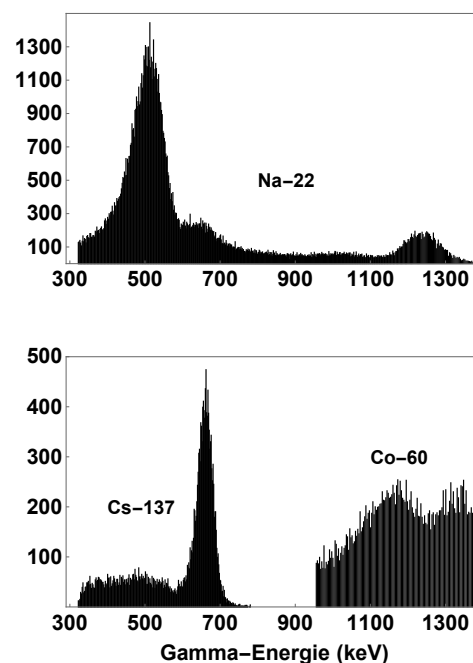


Abbildung 3: Gemessene Gamma-Spektren, die Eichung erfolgte mit Hilfe der beiden Na-22 Peaks. Typischerweise ergibt sich 'links' des jeweiligen Photopeaks eine relativ breite Struktur, welche durch Compton-Streuung innerhalb des Szintillators entsteht. Vertikale Achse: Anzahl registrierte Photonen pro 'Slot'.

3.2 Koinzidenz (Na-22 oder Myonen)

Beim β^+ -Zerfall von Na-22 annihiliert das Positron nach sehr kurzer Zeit mit einem Elektron. Deutlich am häufigsten entstehen dabei zwei 511 keV Gammaquanten, die unter 180° auseinander fliegen. Hier spielt es im vorliegenden Fall keine Rolle, ob die Annihilation direkt oder unter zwischenzeitlicher Bildung eines Para-Positronium-Atoms erfolgt. Durch Messung der γ -Koinzidenzrate als Funktion des Winkels lässt sich die Impulserhaltung bei der Positron-Annihilation testen, wozu natürlich zwei SiPM mit Szintillator notwendig sind. Bei Na-22 ist es sinnvoll die Koinzidenz-Ereignisse auszuschliessen, bei denen mindestens eines der beiden Gammas dem 1275 keV Peak entspricht.

Ähnliche Koinzidenz-Experimente können auch mit der kosmischen Strahlung durchgeführt werden, wobei Myonen auf der Erdoberfläche den Hauptanteil bilden. So lässt sich z.B. untersuchen, ob die Myonen vorzugsweise von 'oben' kommen. Da nur wenige Myonen pro Minute detektiert werden, sind relativ lange Messzeiten nötig. Mangels Eichmöglichkeit lässt sich die Energie von unbekannten Teilchen nicht messen. Weiter können

Myonen auch nicht von anderen Teilchen der kosmischen oder terrestrischen Hintergrundstrahlung unterschieden werden. Trotzdem sieht man in Tabelle 1 dargestellten Messbeispiel eine deutlich höhere Anzahl von Koinzidenzereignissen in der vertikalen als in der horizontalen Anordnung. In beiden Fällen wurden die beiden Szintillatoren ohne Zwischenraum aufgestellt. Die Kontrollmessung mit 20 cm Abstand zwischen den beiden Detektoren ergab (wie erwartet) gar keine Koinzidenzen.

Tabelle 1: Messbeispiel: Koinzidenzraten mit Myonen (und anderen Teilchen der kosmischen und terrestrischen Strahlung)

Anordnung	Koinzidenzrate pro Minute	Messzeit
Vertikal (aufeinander)	0.58 min^{-1}	3 h
Horizontal (nebeneinander)	0.15 min^{-1}	3 h
20 cm voneinander entfernt	0	1 h

3.3 Verschränkung, Comptonstreuung und Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

3.3.1 Theorie der Winkelkorrelation

Bei der dominierenden Singulett-Kopplung von Positron und Elektron bilden die beiden entstehenden Photonen ein verschränktes System mit Gesamtspin Null im Sinne des Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) Paradoxons [4, 5]. Die Korrelation der Photonen Spins lässt sich mit einfachsten Mitteln via Compton-Streuung an einem Metall-Würfel nachweisen. Schon lange vor den theoretischen Arbeiten von Bell [6] und den dadurch angelegten Experimenten wurde die Winkelkorrelation bei der Positronannihilation um 1950 vorausgesagt [7] und gemessen [8]. Nach der Klein-Nishina Formel [9]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha \hbar \lambda}{m_e c \lambda'} \right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - 2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) \right] \quad (1)$$

aus dem Jahr 1929 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Comptonstreuung eines (linear) 'polarisierten' Photons an einem Elektron (mit Masse m_e) nicht nur vom Streuwinkel θ , sondern auch vom azimutalen Winkel ϕ zwischen Polarisations- und Beobachtungsrichtung abhängig. λ und λ' sind dabei die Wellenlängen vor und nach der Streuung, und α steht für die Feinstrukturkonstante. Die Herleitung der Gleichung (1) war eine der ersten Anwendungen der damals neuen Quantenelektrodynamik von Dirac. Da die Spinkomponente eines Photons in Bewegungsrichtung nur $\pm \hbar$ sein kann, was (im System des Detektors) links- bzw. rechtszirkulär polarisierter Strahlung entspricht, kann man sich ein linear polarisiertes Gammaquant als eine Überlagerung beider Helizitäten vorstellen. Werden nun beide Gammaquanten aus der Annihilation des selben Positrons gemäss Abbildung 4a via Compton-Streuung gemessen, so ist die Koinzidenzrate $\Gamma(\theta_1, \theta_2, \varphi)$ u.a. abhängig vom azimutalen Winkel $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ zwischen den Richtungen zu den beiden Detektoren. Setzt man die Streuwinkel gleich ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$), so lässt sich das Koinzidenzraten-Verhältnis

$$V(\theta) = \frac{\Gamma(\theta, \varphi = 90^\circ)}{\Gamma(\theta, \varphi = 0^\circ)} = 1 + \frac{2 \sin^4(\theta)}{\eta^2 - 2 \eta \sin^2(\theta)} \quad (2)$$

aus Gleichung (1) herleiten. Dabei wurde die Abkürzung $\eta = \frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda}$ verwendet und die Photonwellenlänge λ' nach der Streuung ergibt sich nach der bekannten Comptonformel $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} [1 - \cos(\theta)]$. Die Herleitung von Gleichung (2) findet man im Anhang. Das maximale Koinzidenzraten-Verhältnis $V = 2.83$ ergibt sich für $\theta \approx 82^\circ$. Besonders einfach werden die Verhältnisse für $\theta = 90^\circ$: Die Wellenlänge eines Photons aus der Positronannihilation wird genau verdoppelt, und es ergibt sich das theoretische Verhältnis $V = 2.6$.

3.3.2 Messungen zur Winkelkorrelation bzw. Quantenverschränkung

Der erwähnte zu erwartende Wert für das Koinzidenzraten-Verhältnis V gemäss Gleichung (2) bezieht sich auf die idealisierte Situation punktförmiger Streuzentren. Die Abschätzung des Einflusses endlich grosser Kollimatorblenden und der Comptonstreuung an ausgedehnten Metallkörpern wäre ein mögliches Thema für eine

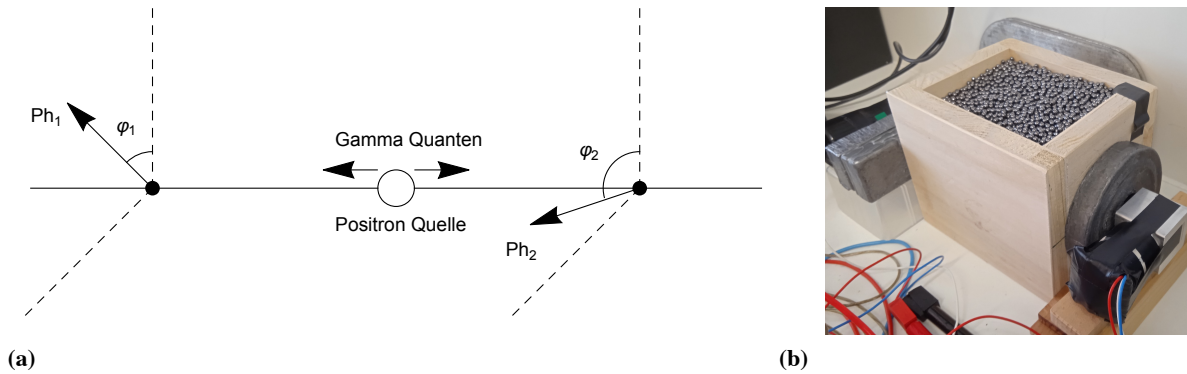


Abbildung 4: a) Messanordnung für den Nachweis der Winkelkorrelation: Streuwinkel $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ für beide Photonen, azimutale Winkeldifferenz $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ zwischen den Flugrichtungen der beiden Photonen Ph_1 und Ph_2 nach der Compton-Streuung. Die schwarz ausgefüllten Scheibchen bezeichnen die beiden Streuzentren (Elektronen). b) Mess-Anordnung: Im Innern der Holzbox verläuft ein Kunststoffrohr von vorne rechts nach hinten links. Die Na-22 Quelle befindet sich in der Mitte des Rohres, der umgebende Raum ist mit Bleikugeln gefüllt. Auf der rechten Seite sieht man einen der beiden Aluminiumwürfel, an denen Compton-Streuung stattfinden soll. Die zylindrischen Szintillatoren sind mit Klebeband an den Würfeln befestigt, unmittelbar anschliessend folgen (lichtdicht) die SiPM mit den nötigen Kabeln. Zusätzliche Bleiabschirmungen (Kollimatoren) vermindern die Anzahl Photonen, die direkt von der Quelle zu den Szintillatoren fliegen und unerwünschte (zufällige) Koinzidenzen auslösen. Das Bild zeigt die Anordnung zu $\varphi = 0^\circ$ (und $\theta = 90^\circ$).

(theoretische) Matura-Arbeit. In der Praxis muss man (für $\theta = 90^\circ$) einen Energiebereich um $\frac{511}{2}$ keV definieren, aus dem Koinzidenzereignisse akzeptiert werden. Ausserdem kann es trotz Bleiabschirmung zu Fehlmessungen durch Photonen kommen, die den Szintillator direkt erreichen und dort Compton gestreut werden. Typischerweise ergeben sich mit der Na-22 Quelle unserer Schule (Restaktivität ca. 3 μCi) in der gewählten Testanordnung (siehe Abbildung 4b) nur relativ wenige Koinzidenzereignisse pro Stunde, bei denen beide Gamma-Energien im definierten Intervall liegen. Um statistisch signifikante Aussagen zur Winkelkorrelation und damit zur Verschränkung der beiden Photonen nach der Positron-Annihilation zu erhalten, sind recht lange Messzeiten nötig. Tabelle 2 zeigt die Koinzidenzraten Γ in den beiden Anordnungen $\varphi = 90^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$ für einige Mess-Serien. In der ersten Zeile sind die Koinzidenzraten zwar deutlich höher, bei diesem Experiment wurde aber nur auf der Primärseite ein zusätzlicher Bleikollimator verwendet. In den folgenden Zeilen sind die Raten kleiner, das Verhältnis $\Gamma_1(\varphi = 90^\circ) / \Gamma_2(\varphi = 0^\circ)$ ist andererseits aber näher am theoretischen Wert für punktförmige Streuzentren. Die Unterschiede der Raten zwischen der zweiten und dritten Zeilen lassen sich durch eine verbesserte Ausrichtung der Kollimatoren erklären. Ein weiterer Effekt ist eine mögliche leichte Verschiebung der Peaks während der Messzeit von einigen Stunden. Für wirklich fundierte Aussagen wären sehr sorgfältige Analysen und längere Messzeiten nötig. Aber immerhin deuten die jeweils innerhalb eines Schultages erzielten Ergebnisse auf einen deutlichen Effekt der Verschränkung der Photon-Spins hin. Eine mechanisch verbesserte Anordnung mit einer fest montierten Drehachse und Detektor-Drehung via Schrittmotor ist in Planung. Damit liessen sich dann bequem tagelange Mess-Serien steuern.

Tabelle 2: Messergebnisse zur Winkelkorrelation nach Comptonstreuung an Aluminiumwürfeln für $\theta = 90^\circ$. Gesamte Messzeit in Stunden (h). Alle Koinzidenzraten Γ pro Minute. Die Bemerkungen mit/ohne beziehen sich auf einen zusätzlichen Bleikollimator auf der Sekundärseite. Die Messzeit ist die Summe der Anteile in den beiden Anordnungen. Der absolute Fehler von Γ_1 / Γ_2 ist geschätzt via Poissonverteilung und Fehlerfortpflanzung.

Messung	$\Gamma_1(\varphi = 90^\circ)$	$\Gamma_2(\varphi = 0^\circ)$	Γ_1 / Γ_2	Messzeit	Bemerkungen
1	2.544 min^{-1}	1.374 min^{-1}	1.85 ± 0.26	2 h	ohne
2	0.478 min^{-1}	0.221 min^{-1}	2.16 ± 0.46	5.2 h	mit
3	0.588 min^{-1}	0.296 min^{-1}	1.99 ± 0.41	4.2 h	mit

4 Schlussfolgerungen und Ausblick

Experimente und Basteleien mit SiPM sind nach meiner Einschätzung ein reizvolles Gebiet, sowohl für Physiklehrkräfte, als auch für interessierte Schüler/innen (z.B. im Rahmen einer Matura-Arbeit). Vor allem bei Koinzidenz-Messungen mit kleinen Raten stellen sich ausserdem interessante, statistische Fragen nach der Signifikanz der Ergebnisse. Für mich persönlich war die Wiederentdeckung der Elektronik (kurz vor der Pensionierung) ein gutes Erlebnis. Als Theoretischer Physiker ohne fundierte Kenntnisse in Elektronik habe ich Vieles durch Ausprobieren gelernt. Es würde mich freuen, wenn dieser Artikel ähnliche Aktivitäten an anderen Schulen anregen könnte. Verbesserungsvorschläge von Kolleginnen und Kollegen mit mehr Elektronik-Erfahrung wären sehr erwünscht.

Dank

Mein besonderer Dank gilt Martin Schranz für die kompetente Hilfe bei mechanischen Problemen.

Anhang: Herleitung von Gleichung (2)

Man kann annehmen, dass beide Helizitäten des 'ersten' Gammaquants (vor der Streuung) gleich wahrscheinlich sind. Die folgende kleine Herleitung ist aber für lineare Polarisation formuliert, wie es auch der Klein-Nishina Formel (1) entspricht. Die beiden Darstellungen lassen sich mit einer linearen Abbildung in einander transformieren. Wir verwenden als Referenz die Streuebene des ersten Photons Ph_1 . Nach Gleichung (1) erhält man für die Wahrscheinlichkeiten der Polarisationsrichtung des (ersten) Photons nach der Streuung $p_1^p = \left[\frac{\eta - 2 \sin^2(\theta)}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)} \right]$ (in der Streuebene $\phi = 0^\circ$) bzw. $p_1^s = \left[\frac{\eta}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)} \right]$ (senkrecht zur Streuebene $\phi = 90^\circ$). Wenn wir annehmen, dass die beiden Photonen vor der Streuung senkrecht zueinander polarisiert und die beiden Streuwinkel gleich (θ) sind, dann ergeben sich die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für das 'zweite' Photon Ph_2 : $p_2^p = \left[\frac{\eta}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)} \right]$ bzw. $p_2^s = \left[\frac{\eta - 2 \sin^2(\theta)}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)} \right]$. Damit wird der Wirkungsquerschnitt dafür das zweite Photon Ph_2 in Koinzidenz mit Ph_1 zu detektieren proportional zu $W(\theta, \varphi) = p_2^p [\eta - 2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)] + p_2^s [\eta - 2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi - 90^\circ)]$, wobei φ nach wie vor für die azimutale Winkeldifferenz zwischen den beiden Beobachtungsrichtungen steht. Vereinfachung liefert $W(\theta, \varphi) = \frac{2\eta^2 - 4\eta \sin^2(\theta) + 4 \sin^4(\theta) \sin^2(\varphi)}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)}$. Bildet man nun das Verhältnis

$$\frac{W(\theta, \varphi = 90^\circ)}{W(\theta, \varphi = 0^\circ)} = \frac{2\eta^2 - 4\eta \sin^2(\theta) + 4 \sin^4(\theta)}{2\eta^2 - 4\eta \sin^2(\theta)}, \quad (3)$$

so ergibt sich Gleichung (2).

Literatur und Links

- [1] Stefan Gundacker and Arjan Heering, 2020, *Phys. Med. Biol.* **65** 17TR01
- [2] <https://www.martinlehner.ch>
- [3] <http://www.cosmicwatch.lns.mit.edu>
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, 1953, *Phys. Rev.* **47** 777
- [5] A. Faraci, D. Gutkowski, S. Notarrigo, A.R. Pennisi, 1974, *Lett. al Nuovo Cimento* **9** 607
- [6] J.S. Bell, 1964, *Physics* **1** 195
- [7] M.H.L. Pryce, J.C. Ward, 1947, *Nature* **160** 435
- [8] C.S. Wu, I. Shaknov, 1950, *Phys. Rev.* **77** 136
- [9] O. Klein, Y. Nishina, 1929, *Z. Physik* **52** 853